



OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

FAZA LOCALĂ 10.02.2024

CLASA a X-a

SOLUȚII ȘI BAREME ORIENTATIVE

Notă: Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte. Se acordă numai punctaje întregi. Orice altă rezolvare corectă se asimilează conform baremului.

Subiectul 1. Se consideră funcțiile f, g, h: Q -> Q cu h(x) = f(x) + sqrt(2024)g(x), pentru orice x in Q.

a) Să se arate că, dacă cel puțin una dintre funcțiile f și g este injectivă, atunci h este injectivă.

b) Dacă h este injectivă, este necesar ca cel puțin una dintre funcțiile f și g să fie injectivă?

Barem de notare

a) f(x) + sqrt(2024)g(x) in Q, for all x in Q

Cum f(x), g(x) in Q și sqrt(2024) in R \ Q, rezultă g(x) = 0, for all x in Q 3p

g nu este injectivă, rezultă că f este injectivă..... 1p

h(x) = f(x), for all x in Q, deci h este injectivă..... 1p

b) Da. h(x) = f(x), for all x in Q. Dacă h este injectivă, rezultă că f este injectivă..... 2p

Subiectul 2. Fie funcția f: (0, infinity) \ {1} -> R, f(x) = x^log_2023 2024 + 2023^log_x 2024.

Să se arate că {x in (0, infinity) \ {1} | f(x) >= 2} = {x in (0, infinity) \ {1} | f(x) >= 4048}.

Alina Paraschiv

Barem de notare

f(x) = 2024^log_2023 x + 2024^log_x 2023 1p

Fie $A = \{x \in (0, \infty) \setminus \{1\} \mid f(x) \geq 2\}$ și $B = \{x \in (0, \infty) \setminus \{1\} \mid f(x) \geq 4048\}$

• Dacă $x \in (0, 1)$, atunci $\log_{2023} x < 0$ și $\log_x 2023 < 0$, deci $f(x) < 2$, de unde $x \notin A \cup B$. Rezultă $A \cup B \subseteq (1, \infty)$ **2p**

• Dacă $x \in (1, \infty)$, atunci $\log_{2023} x > 0$, $\log_x 2023 > 0$ și, aplicând de două ori inegalitatea mediilor, obținem $f(x) \geq 2\sqrt{2024^{\log_{2023} x + \log_x 2023}} \geq 2\sqrt{2024^2} = 4048$,

deci $x \in A \cap B$, de unde $(1, \infty) \subseteq A \cap B$ **3p**

• Obținem $A \cup B \subseteq A \cap B$, deci $A = B$ **1p**

Subiectul 3. Fie n un număr natural nenul. Să se arate că numărul $n^2 + 2^{\lceil \log_2 n \rceil}$ se poate scrie ca produs de două numere naturale consecutive dacă și numai dacă n este o putere cu exponent natural a lui 2.

Cristinel Mortici, Gazeta Matematică

Barem de notare

• Șirul $(x_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$, cu $x_k = k(k-1)$ este strict crescător.....**1p**

• $x_n = n(n-1) < n^2 + \frac{n}{2} = n^2 + 2^{\log_2 n-1} < n^2 + 2^{\lceil \log_2 n \rceil} \leq n^2 + 2^{\log_2 n} = n(n+1) = x_{n+1}$
.....**4p**

• $n^2 + 2^{\lceil \log_2 n \rceil}$ este termen al șirului $(x_k)_{k \in \mathbb{N}^*} \Leftrightarrow n^2 + 2^{\lceil \log_2 n \rceil} = n(n+1) \Leftrightarrow \lceil \log_2 n \rceil = \log_2 n \Leftrightarrow \log_2 n \in \mathbb{N} \Leftrightarrow n = 2^p$ cu $p \in \mathbb{N}$ **2p**

Subiectul 4. Se consideră numerele complexe a, b, c, d astfel încât $|a| = |b| = |c| = |d| = 1$, $|a + b + c + d| = \sqrt{2}$ și $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 0$. Să se arate că $|a^3 + b^3 + c^3 + d^3| = 2\sqrt{2}$.

Flavian Georgescu

Barem de notare

• Cum $\sum a^2 = 0$ și $|a^2| = |b^2| = |c^2| = |d^2| = 1$, rezultă că a^2, b^2, c^2, d^2 sunt afixele vârfurilor unui dreptunghi (eventual degenerat) înscris în cercul unitate. După eventuale redenumiri ale afixelor, putem presupune că $a^2 = -b^2, c^2 = -d^2$ și, mai mult, $b = ia, d = ic$ **3p**

• Cum $|a + b + c + d| = \sqrt{2}$, rezultă $|(1+i)(a+c)| = \sqrt{2}$, deci $|a+c| = 1$. Atunci
 $1 = (a+c)\overline{(a+c)} = 2 + a\bar{c} + \bar{a}c$, deci $a\bar{c} + \bar{a}c = -1$, de unde $\frac{a}{c} + \frac{c}{a} = -1$, echivalent
 cu $a^2 + c^2 = -ac$ **2p**

• Avem $a^3 + b^3 + c^3 + d^3 = (1-i)(a^3 + c^3) = (1-i)(a+c)(a^2 - ac + c^2) =$
 $= -2ac(1-i)(a+c)$, de unde $|a^3 + b^3 + c^3 + d^3| = 2|ac||1-i||a+c| = 2\sqrt{2}$ **2p**