OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ, 10.02.2024

CLASA a 9-a

SOLUŢII ŞI BAREME ORIENTATIVE

Notă: Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte. Se acordă numai punctaje întregi. Orice altă rezolvare se asimilează conform baremului.

Problema 1 (autor *Darius Popescu*, SGM nr. 10/2023)

Pentru fiecare număr natural nenul n considerăm intervalul $I_n=\left[\frac{n+1}{n},\frac{16n-4}{n+1}\right]$.

a) Determinați valorile lui n pentru care mulțimea $I_n\cap\mathbb{N}$ are exact 13 elemente.

b) Determinați numărul minim și numărul maxim de elemente pe care le au mulțimile $I_n\cap\mathbb{N}$, pentru $n=1,2,3,\ldots$.

Detalii rezolvare	**Barem asociat**
a) $I_1=[2,6]$, deci $I_1\cap\mathbb{N}$ are 5 elemente	**1p**
Pentru $n\ge 2$, $\frac{n+1}{n}=1+\frac{1}{n}\in(1,2)$	**1p**
$I_n\cap\mathbb{N}$ are 13 elemente dacă și numai dacă $\frac{16n-4}{n+1}\in[14,15)$, adică $9\le n\le 18$	**2p**
b) Pentru $n\ge 2$, $\frac{16n-4}{n+1}=16-\frac{20}{n+1}\ge 16-\frac{20}{3}>9$, deci $I_n\cap\mathbb{N}$ are cel puțin 9 elemente, iar minimul cerut este 5 (pentru I_1)	**1p**
$16-\frac{20}{n+1}<16$, deci $I_n\cap\mathbb{N}$ are cel mult 14 elemente, iar maximul cerut este 14 și se obține, de exemplu, pentru $n=20$	**2p**

Problema 2 (autor ***)

Rezolvați ecuația $\left[x[x]\right]=1$, unde $[a]$ reprezintă partea întreagă a numărului real a.

Detalii rezolvare	**Barem asociat**
Dacă $x\ge 2$, atunci $x[x]\ge 2x\ge 4$, deci ecuația nu are soluții în acest caz	**1p**
Dacă $x\in[1,2)$, atunci $\left[x[x]\right]=[x]=1$, deci orice $x\in[1,2)$ este soluție a ecuației	**2p**
Dacă $x\in[0,1)$, atunci $x[x]=0$, deci ecuația nu are soluții în acest caz	**1p**
Dacă $x\in[-1,0)$, atunci $x[x]=-x$, iar $[-x]=1\Leftrightarrow -x\in[1,2)\Leftrightarrow x\in(-2,-1]$ deci ecuația are în acest caz soluția $x=-1$	**1p**
Dacă $x<-1$, atunci $[x]\le -2$, deci $x[x]\ge -2x>2$ și ecuația nu are soluții în acest caz	**1p**

Mulțimea soluțiilor ecuației este $\{-1\} \cup [1,2)$	**1p**

Problema 3 (autor *Mihai Alexandru*)

a) Fie S, T, U, V patru puncte în plan, X mijlocul segmentului ST și Y mijlocul segmentului UV. Arătați că $2\overrightarrow{XY} = \overrightarrow{SU} + \overrightarrow{TV}$.

b) Fie $ABCDE$ un pentagon convex și F, G, H, I, J, K mijloacele segmentelor BC, CD, DE, EA, GI, respectiv FH. Presupunem că $J \neq K$. Arătați că $JK \parallel AB$.

Detalii rezolvare	**Barem asociat**
a) $\overrightarrow{XY} = \overrightarrow{XS} + \overrightarrow{SU} + \overrightarrow{UY}$	**1p**
$\overrightarrow{XY} = \overrightarrow{XT} + \overrightarrow{TV} + \overrightarrow{VY}$	**1p**
Cum $\overrightarrow{XS} + \overrightarrow{XT} = \vec{0}$ și $\overrightarrow{VY} + \overrightarrow{UY} = \vec{0}$, adunând primele două relații obținem concluzia	**2p**
b) $\overrightarrow{JK} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{GH} + \overrightarrow{IF}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{CE} + \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{EC}\right)\right) = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$, de unde $JK \parallel AB$	**3p**

Problema 4 (autor ***)

Arătați că, dacă x este număr real nenul și $\{x\} + \left\{\frac{1}{x}\right\} = 1$, atunci $\left\{x^2\right\} + \left\{\frac{1}{x^2}\right\} = 1$, unde $\{a\}$ reprezintă partea fracționară a numărului real a.

Detalii rezolvare	**Barem asociat**
Dacă a, b sunt numere reale, observăm că $\{a\} + \{b\} = 1$ dacă și numai dacă $a + b$ este întreg și a, b nu sunt întregi: - dacă $\{a\} + \{b\} = 1$, atunci $a + b = [a] + [b] + \{a\} + \{b\} = [a] + [b] + 1 \in \mathbb{Z}$ și a, b nu sunt întregi, deoarece în acest caz am avea $\{a\} + \{b\} = 0$; - dacă $a + b$ este întreg și a, b nu sunt întregi, atunci $\{a\} + \{b\} = a + b - [a] - [b] \in \mathbb{Z}$, $\{a\} + \{b\} > 0$ și $\{a\} + \{b\} < 2$, deci $\{a\} + \{b\} = 1$	**3p**
Dacă $\{x\} + \left\{\frac{1}{x}\right\} = 1$, atunci $x + \frac{1}{x} = n$, cu n întreg, deci $x^2 + \frac{1}{x^2} = n^2 - 2$ este întreg	**3p**
Dacă x^2 și $\frac{1}{x^2}$ sunt întregi, atunci $x^2 = 1$, deci $x = \pm 1$, contradicție cu $\{x\} + \left\{\frac{1}{x}\right\} = 1$	**1p**