OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

FAZA LOCALĂ 10.02.2024

CLASA a XII-a

SOLUȚII ȘI BAREME ORIENTATIVE

Notă: Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte. Se acordă numai punctaje întregi. Orice altă rezolvare corectă se asimilează conform baremului.

Subiectul 1. Să se determine primitivele funcției $f:(-3,\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\dfrac{x^3e^x}{(x+3)^2}$

Mihaela Berindeanu, Gazeta Matematică

Barem de notare

- $\int \frac{x^3e^x}{(x+3)^2}dx=\int\left(-\frac{1}{x+3}\right)' x^3e^x dx=-\frac{1}{x+3}x^3e^x+\int\frac{1}{x+3}\left(3x^2+x^3\right)e^x dx=$..........**3p**
- $=-\frac{1}{x+3}x^3e^x+\int x^2e^x dx=-\frac{1}{x+3}x^3e^x+x^2e^x-\int 2xe^x dx=$....................................**2p**
- $-\frac{1}{x+3}x^3e^x+x^2e^x-2(x-1)e^x+C=\frac{x^2-4x+6}{x+3}e^x+C$ **2p**

Subiectul 2. Fie $(G,\cdot)$ un grup. Spunem că un morfism de grupuri $f:G\to G$ are proprietatea (P), dacă există un număr $k\in\mathbb{Z}$ astfel încât $f\left(x^k\right)=x$, pentru orice $x\in G$.

$a)$ Să se arate că, dacă f are proprietatea (P), atunci f este izomorfism.

$b)$ Știind că $(G,\cdot)$ este comutativ, finit, cu n elemente, să se arate că f are proprietatea (P) dacă și numai dacă există $q\in\mathbb{Z}$ cu $(n,q)=1$ astfel încât $f(x)=x^q$, pentru orice $x\in G$.

Marian Andronache

Barem de notare

$a)$ • Fie $x\in G$. Cum $f\left(x^k\right)=x \;\Rightarrow f$ este surjectivă..**1p**

• Fie $x,y\in G$. Atunci

$f(x)=f(y)\Rightarrow\left(f(x)\right)^k=\left(f(y)\right)^k\Rightarrow f\left(x^k\right)=f\left(y^k\right)\Rightarrow x=y$, deci f este injectivă...**1p**

$b)$ • Fie f cu proprietatea (P), $k\in\mathbb{Z}$ cu $\left(f(x)\right)^k=x$ și p un număr prim cu $p|n$ și $p|k$. Din teorema lui Cauchy, există $a\in G\setminus\{e\}$ cu $a^p=e$, unde e este elementul neutru al lui G. Rezultă $e=f(e)=f\left(a^k\right)=a$, contradicție, deci $(n,k)=1$. Fie $t,q\in\mathbb{Z}$ cu $tn+qk=1$, atunci $(n,q)=1$ și $f(x)=f\left(x^{tn+qk}\right)=f\left(x^{qk}\right)=f\left(\left(x^q\right)^k\right)=x^q$, pentru orice $x\in G$..**3p**

• Reciproc, dacă $f(x)=x^q$ cu $(n,q)=1$, cum G este abelian, rezultă că f este morfism. Fie $t,k\in\mathbb{Z}$ cu $tn+qk=1$, atunci $f\left(x^k\right)=x^{kq}=x^{1-tn}=x$ pentru orice $x\in G$, deci f are proprietatea (P)..**2p**

Subiectul 3. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ o funcție care admite o primitivă $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ cu proprietatea că $\left|F(x)\right|+f(x)=0$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$.

$a)$ Să se arate că funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=-e^x$ verifică ipoteza problemei.

$b)$ Să se determine toate funcțiile f care verifică ipoteza problemei.

Vlad Florentin Drinceanu și Flavian Georgescu

Barem de notare

$a)$ • $F(x)=-e^x$ are proprietatea din enunț, deci f verifică ipoteza problemei.................**2p**

$b)$ • Fie f cu proprietatea din enunț și F o primitivă cu $\left|F(x)\right|+f(x)=0$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$. Fie $I\subseteq\mathbb{R}$ un interval, cu $F(x)\geq 0$ pentru $x\in I$. Cum $F(x)+f(x)=0$, rezultă că $\left(e^xF(x)\right)'=0$, deci $e^xF(x)=k\geq 0$. Obținem $F(x)=ke^{-x}$, deci $f(x)=pe^{-x}$ oricare ar fi $x\in I$, cu $p\leq 0$..**1p**

• Fie $I \subseteq \mathbb{R}$ un interval cu $F(x) \leq 0$ pentru $x \in I$. Cum $-F(x) + f(x) = 0$, rezultă că $\left(e^{-x}F(x)\right)' = 0$, deci $e^{-x}F(x) = k \leq 0$. Obținem $F(x) = ke^{x}$, deci $f(x) = ke^{x}$ oricare ar fi $x \in I$, cu $k \leq 0$ **1p**

• Dacă există $a \in \mathbb{R}$ cu $F(a) = 0$, cum $f(x) = -|F(x)| \leq 0$ oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$, rezultă că F este descrescătoare, deci $F(x) \geq 0$ pe $(-\infty, a)$ și $F(x) \leq 0$ pe (a, ∞). Atunci $F(x) = pe^{-x}$, $x \in (-\infty, a)$ și $F(x) = ke^{x}$, $x \in (a, \infty)$, iar, din continuitatea lui F în a, obținem $p = k = 0$, deci $F(x) = 0$, de unde $f(x) = 0$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$ **2p**

• Obținem funcțiile $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cu $f(x) = ke^{-x}$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$ și $f(x) = ke^{x}$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$, cu $k \leq 0$ **,** funcții care verifică ipoteza problemei..................................**1p**

Subiectul 4. Fie n, k două numere naturale cu $1 \leq k \leq n$, $(G, \cdot)$ un grup cu n elemente și X_0 o submulțime a lui G, cu k elemente. Pentru fiecare $a \in G$ notăm cu $aX_0 = \{ax \mid x \in X_0\}$ și fie $M = \{Y \subseteq G \mid \exists a \in G, Y = aX_0\}$. Știind că M are cel mult $\frac{n}{k}$ elemente, să se arate că G are un subgrup cu k elemente.

Marian Andronache

Barem de notare

• Fie $a \in G$ și $x \in X_0$. Cum $a \in ax^{-1}X_0 \in M$, rezultă că $G = \bigcup_{Y \in M} Y$ **2p**

• Fie $Y = aX_0 \in M$. Cum funcția $f : X_0 \to Y, f(x) = ax$ este bijectivă, rezultă că $|Y| = k$, unde $|A|$ reprezintă cardinalul mulțimii A. Cum $n = |G| = \left|\bigcup_{Y \in M} Y\right| \leq \sum_{Y \in M} |Y| \leq \frac{n}{k} \cdot k = n$, rezultă că $|M| = \frac{n}{k}$ și elementele lui M reprezintă o partiție a lui G. **3p**

• Fie $Y_0 = aX_0$, cu $e \in Y_0$, unde e este elementul neutru al lui G. Fie $y_1 = ax_1, y_2 = ax_2$, cu $x_1, x_2 \in X_0$. Atunci $y_1^{-1}y_2 = x_1^{-1}a^{-1}ax_2 = x_1^{-1}x_2 \in x_1^{-1}X_0$. Cum $e \in x_1^{-1}X_0$, rezultă că $x_1^{-1}X_0 = Y_0$, deci $y_1^{-1}y_2 \in Y_0$, de unde Y_0 este subgrup al lui G cu k elemente..............**2p**