

11.05.2023

Colegiul Național de Informatică „Tudor Vianu”
Concursul „Micii Campioni” – 2023
Ziua 1

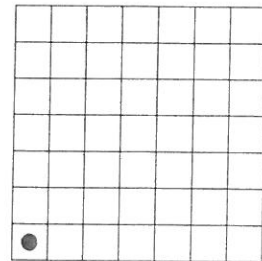
Problema 1. Mihai a început să citească o carte pe 1 martie. În fiecare zi el a citit același număr de pagini și a terminat cartea pe 31 martie. Dacă în prima zi el ar fi citit de 4 ori mai puține pagini și în fiecare zi următoare câte o pagină mai mult decât în ziua precedentă, el ar fi terminat cartea tot pe 31 martie. Determinați câte pagini are cartea.

Problema 2. La un test de matematică, ce conține patru probleme, au participat 26 de elevi. Dintre ei, 22 au rezolvat prima problemă, 21 au rezolvat a doua problemă, 20 a treia problemă și 19 a patra problemă. Arătați că cel puțin 4 elevi au rezolvat toate cele patru probleme.

Problema 3. Cu cifrele 0, 1, 2 și 3 sunt formate toate numerele de trei cifre cu cifre diferite. Calculați suma tuturor acestor numere.

Problema 4. În pătrățelele unui tablou 10×10 se așează în mod arbitrar numerele de la 1 la 100 (în fiecare pătrățel se așează un singur număr). Notăm cu S_1, S_2, \dots, S_{10} sumele numerelor situate în coloanele tabloului. Se poate ca printre numerele S_1, S_2, \dots, S_{10} oricare două vecine să difere între ele exact cu 1? Justificați răspunsul. (S_1 are vecin pe S_2 , S_2 are vecini pe S_1 și S_3 , \dots , S_9 are vecini pe S_8 și S_{10} , S_{10} are vecin pe S_9)

Problema 5. Se consideră o tablă 7×7 ca în figură. În colțul din stânga jos se află o fisă. Doi elevi Andrei și Bogdan mută alternativ fisa în unul dintre pătrățelele vecine cu cel în care este fisa. (Două pătrățele sunt vecine dacă au o latură comună) Pierde acel elev, după mutarea căruia fisa ajunge într-un pătrățel în care a mai fost. Știind că Andrei mută primul fisa, arătați că unul dintre elevi are o strategie cu care câștigă de fiecare dată. Care este aceasta? Justificați răspunsul.



Timp de lucru 2 ore.

Fiecare problemă valorează 15 puncte.

11.05.2023

Colegiul Național de Informatică „Tudor Vianu”
Concursul „Micii Campioni” – 2023
Ziua 1

Problema 1. Mihai a început să citească o carte pe 1 martie. În fiecare zi el a citit același număr de pagini și a terminat cartea pe 31 martie. Dacă în prima zi el ar fi citit de 4 ori mai puține pagini și în fiecare zi următoare câte o pagină mai mult decât în ziua precedentă, el ar fi terminat cartea tot pe 31 martie. Determinați câte pagini are cartea.

Soluție și barem orientativ Notăm cu x numărul de pagini pe care îl citește în fiecare zi. Atunci $x = 4a$, unde a este numărul de pagini pe care l-ar citi în prima zi, în a doua situație 2p
 $31x = a + (a + 1) + (a + 2) + \dots + (a + 30)$ 4p
 $31 \cdot 4a = 31 \cdot a + (1 + 2 + \dots + 30)$ 3p
 $31 \cdot 4a = 31 \cdot a + 31 \cdot 15 \Rightarrow 4a = a + 15 \Rightarrow a = 5$ 4p
 $x = 20 \Rightarrow$ cartea are $31 \cdot 20 = 620$ de pagini 2p

Problema 2. La un test de matematică, ce conține patru probleme, au participat 26 de elevi. Dintre ei, 22 au rezolvat prima problemă, 21 au rezolvat a doua problemă, 20 a treia problemă și 19 a patra problemă. Arătați că cel puțin 4 elevi au rezolvat toate cele patru probleme.

Soluție și barem orientativ
 $26 - 22 = 4$ elevi nu au rezolvat prima problemă 2p
 $26 - 21 = 5$ elevi nu au rezolvat a doua problemă 2p
 $26 - 20 = 6$ elevi nu au rezolvat a treia problemă 2p
 $26 - 19 = 7$ elevi nu au rezolvat a patra problemă 2p
Numărul elevilor care nu au rezolvat toate problemele este cel mult egal cu $4 + 5 + 6 + 7 = 22$ 4p
Cum $26 - 22 = 4$, rezultă că cel puțin 4 elevi au rezolvat toate cele 4 probleme
3p

Problema 3. Cu cifrele 0, 1, 2 și 3 sunt formate toate numerele de trei cifre cu cifre diferite. Calculați suma tuturor acestor numere.

Soluție și barem orientativ
Observație: Toate numerele de trei cifre, cu cifre distincte, formate cu 0, 1, 2 și 3 sunt în număr de $3 \cdot 3 \cdot 2 = 18$. (prima cifră nu poate fi 0)
Fiecare din cifrele 1, 2 și 3 apare ca cifră a sutelor în 6 numere 3p
Fiecare din cifrele 1, 2 și 3 apare ca cifră a zecilor și ca cifră a unităților în 4 numere 5p
Rezultă că suma acestor numere va fi:
 $6 \cdot (300 + 200 + 100) + 4 \cdot (30 + 20 + 10) + 4 \cdot (3 + 2 + 1) = 3864$ 7p

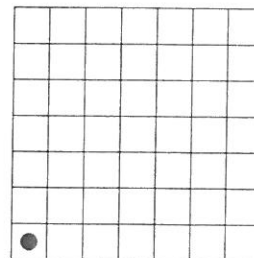
Problema 4. În pătrățelele unui tablou 10×10 se așează în mod arbitrar numerele de la 1 la 100 (în fiecare pătrățel se așează un singur număr). Notăm cu S_1, S_2, \dots, S_{10} sumele numerelor situate în coloanele tabloului. Se poate ca printre numerele S_1, S_2, \dots, S_{10} oricare două vecine să difere între ele exact cu 1? Justificați răspunsul. (S_1 are vecin pe S_2 , S_2 are vecini pe S_1 și S_3 , ..., S_9 are vecini pe S_8 și S_{10} , S_{10} are vecin pe S_9)

Soluție și barem orientativ Vom demonstra că nu există o așezare a numerelor în tablou cu proprietatea din enunț. Presupunem contrariul. Rezultă că s-a reușit așezarea cerută. Atunci, fiindcă sumele numerelor de pe coloane vecine diferă cu o unitate, în cinci coloane sumele sunt pare iar în celelalte cinci coloane sumele sunt impare **7p**

Prin urmare, $S_1 + S_2 + \dots + S_{10}$ este număr impar **6p**

Dar $S_1 + S_2 + \dots + S_{10} = 1 + 2 + \dots + 100 = 5050$, număr par, ajungem la o contradicție **2p**

Problema 5. Se consideră o tablă 7×7 ca în figură. În colțul din stânga jos se află o fisă. Doi elevi Andrei și Bogdan mută alternativ fisă în unul dintre pătrățelele vecine cu cel în care este fisă. (Două pătrățele sunt vecine dacă au o latură comună) Pierde acel elev, după mutarea căruia fisă ajunge într-un pătrățel în care a mai fost. Știind că Andrei mută primul fisă, arătați că unul dintre elevi are o strategie cu care câștigă de fiecare dată. Care este aceasta? Justificați răspunsul.

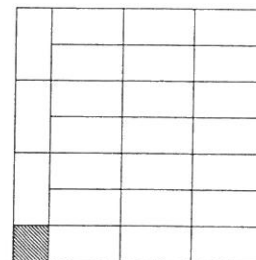


Soluție și barem orientativ Vom arăta că Bogdan are o strategie cu care câștigă întotdeauna.

Împărțim toate pătrățelele tablei, cu excepția celui din colțul stânga jos, în perechi, așa cum se vede în figura alăturată **6p**

La fiecare mutare a lui Andrei prin care ajunge într-un pătrățel, Bogdan mută fisă în pătrățelul din perechea formată **7p**

Astfel Bogdan are întotdeauna mutare de răspuns, deci el câștigă **2p**



Orice soluție alternativă completă a oricărei probleme va primi punctaj maxim. Orice soluție alternativă incompletă va fi punctată corespunzător.