



OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ, 11.02.2023
CLASA a V-a
SOLUȚII ȘI BAREME ORIENTATIVE

Notă: Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte. Se acordă numai punctaje întregi. Orice altă rezolvare se asimilează conform baremului.

Enunț subiect 1, autor ***

- a) Aflați câte numere naturale de 3 cifre se împart exact la 31.
b) Cu câte zerouri se termină produsul acestor numere?

Detalii rezolvare	Barem asociat
a) Cel mai mic număr este $124 = 31 \cdot 4$, iar cel mai mare $992 = 31 \cdot 32$,	2p
în total 29 de numere de 3 cifre care se împart exact la 31.	1p
b) Obținem 0 la finalul unui produs prin înmulțire cu $10 = 5 \cdot 2$	1p
Factorii de 5 apar de la numerele $31 \cdot 5, 31 \cdot 10, 31 \cdot 15, 31 \cdot 20, 31 \cdot 25$ și $31 \cdot 30$	1p
Dar $25 = 5 \cdot 5 \Rightarrow$ produsul se va termina în 7 zerouri.	2p

Enunț subiect 2, autor Manuela Popescu. G.M. 9/2022

Un număr natural, scris în baza 10, are 3 cifre și, împărțit la răsturnatul său, dă câtul 2 și restul 100. Aflați produsul cifrelor numărului.

Detalii rezolvare	Barem asociat
$\overline{abc} = \overline{cba} \cdot 2 + 100$ număr par $\Rightarrow c$ cifră pară	1p
Cum $\overline{cba} \cdot 2 + 100 < 1000 \Rightarrow \overline{cba} < 450 \Rightarrow c \leq 4$	1p
Cazul I $c = 4 \Rightarrow \overline{ab4} = \overline{4ba} \cdot 2 + 100 \Rightarrow a = 9 \Rightarrow$ $u.c.(\overline{9b4}) = u.c.(\overline{4b9} \cdot 2 + 100) \Leftrightarrow 4 = 8$ Fals!	2p
Cazul II $c = 2 \Rightarrow \overline{ab2} = \overline{2ba} \cdot 2 + 100 \Rightarrow u.c.(a \cdot 2) = 2 \Rightarrow a = 1$ sau $a = 6$ Cum $\overline{ab2} > 500 \Rightarrow a = 6$	2p
Din $\overline{6b2} = \overline{2b6} \cdot 2 + 100 \Rightarrow b = 9 \Rightarrow \overline{abc} = 692 \Rightarrow a \cdot b \cdot c = 108$.	1p

Enunț subiect 3, autor Traian Preda

Profesorul scrie pe tablă 25 de numere naturale consecutive. Andrei afirmă că suma numerelor pare scrise pe tablă este cu 2023 mai mare decât suma numerelor impare scrise pe tablă, iar Bogdan că suma numerelor impare este mai mare cu 2023 decât suma celor pare. Știind că una dintre cele două afirmații este adevărată, aflați numerele scrise pe tablă.

Detalii rezolvare	Barem asociat
Notăm numerele consecutive cu $a, a + 1, a + 2, \dots, a + 24$ și cu S_p, S_i sumele numerelor pare, respectiv impare, dintre cele 25 de numere scrise pe tablă. Numerele $a, a + 2, \dots, a + 24$ au aceeași paritate, iar $a + 1, a + 3, \dots, a + 23$ cealaltă paritate. Diferența sumelor va fi întotdeauna $S_1 - S_2$ $= a + (a + 2) - (a + 1) + (a + 4) - (a + 3) + \dots + (a + 24) - (a + 23) = a + 12$	2p
I. a par $\Rightarrow$ avem 13 numere pare și 12 impare, iar $S_p > S_i \Rightarrow S_p - S_i = a + 12$ Dacă afirmația lui Andrei ar fi corectă, atunci $a + 12 = 2023 \Rightarrow a = 2011$ Dar 2011 este impar, a par, deci Andrei nu poate spune adevărul.	2p
II. a impar $\Rightarrow$ avem 13 numere impare și 12 pare, $S_i > S_p \Rightarrow S_i - S_p = a + 12$ Atunci $a + 12 = 2023 \Rightarrow a = 2011$, număr impar, deci afirmația lui Bogdan este cea corectă, iar numerele de pe tablă sunt 2011, 2012, 2013, ..., 2035.	3p

Enunț subiect 4, autori Cristian Olteanu și Traian Preda

a) Determinați ultima cifră a numărului $n = (6^2 + 9^2 + 15^2 + 41^2)^{2023}$.

b) Fie numărul $N = \underbrace{20232023 \dots 2023}_{2024 \text{ cifre}}$. Scrieți numărul N ca suma a 2024 pătrate perfecte distincte și nenule.

Detalii rezolvare	Barem asociat
a) $n = 2023^{2023}$ are ultima cifră 7	2p
b) $N = 2023 \cdot 10^{2020} + 2023 \cdot 10^{2016} + \dots + 2023 \cdot 10^4 + 2023 =$	2p
$(6^2 + 9^2 + 15^2 + 41^2) \cdot 10^{2020} + (6^2 + 9^2 + 15^2 + 41^2) \cdot 10^{2016} + \dots +$ $(6^2 + 9^2 + 15^2 + 41^2) \cdot 10^4 + (6^2 + 9^2 + 15^2 + 41^2) =$	1p
$(6 \cdot 10^{1010})^2 + (9 \cdot 10^{1010})^2 + (15 \cdot 10^{1010})^2 + (41 \cdot 10^{1010})^2 + (6 \cdot 10^{1008})^2 +$ $+(9 \cdot 10^{1008})^2 + (15 \cdot 10^{1008})^2 + (41 \cdot 10^{1008})^2 + \dots + 6^2 + 9^2 + 15^2 + 41^2$	2p



OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ, 11.02.2023
CLASA a VI-a
SOLUȚII ȘI BAREME ORIENTATIVE

Notă: Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte. Se acordă numai punctaje întregi. Orice altă rezolvare se asimilează conform baremului.

Enunț subiect 1, autor ***

Determinați numerele prime a, b, c , știind că $51a + 24b + 17c = 2023$.

Detalii rezolvare	Barem asociat
$51 : 17, 2023 : 17 \Rightarrow 24b : 17$. Cum $(24, 17) = 1 \Rightarrow b : 17$ b fiind număr prim $\Rightarrow b = 17$	2p
Obținem $3a + c = 95 \Rightarrow$ unul din numere trebuie să fie par $\Rightarrow a = 2$ sau $c = 2$	1p
$a = 2 \Rightarrow c = 89$, număr prim, deci $a = 2, b = 17, c = 89$	2p
$c = 2 \Rightarrow a = 31$, număr prim, deci $a = 31, b = 17, c = 2$	2p

Enunț subiect 2, autor Vasile Scurtu, S.G.M. 11/2022

Aflați numerele naturale x și y , știind că $5^x - 5^y = 15000$.

Detalii rezolvare	Barem asociat
$5^y \cdot (5^{x-y} - 1) = 2^3 \cdot 3 \cdot 5^4$	3p
$x > y \Rightarrow 5 \nmid 5^{x-y} - 1 \Rightarrow y = 4$ și $5^{x-4} - 1 = 24 \Rightarrow x = 6$	4p

Enunț subiect 3, autor Traian Preda

Se consideră trei unghiuri în jurul unui punct, având măsurile direct proporționale cu trei numere naturale consecutive. Arătați că unghiul format de bisectoarele a două dintre unghiuri este congruent cu cel de-al treilea unghi.

Detalii rezolvare	Barem asociat
Notăm cu $\angle AOB, \angle BOC$ și $\angle COA$ cele 3 unghiuri și cu n numărul mai mic. Atunci $\frac{\angle AOB}{n} = \frac{\angle BOC}{n+1} = \frac{\angle COA}{n+2} = \frac{\angle AOB + \angle BOC + \angle COA}{n+n+1+n+2} = \frac{360^\circ}{3n+3}$ $= \frac{120^\circ}{n+1}$ $\Rightarrow \angle BOC = 120^\circ$	4p
Fie $(OM$ și $(ON$ bisectoarele unghiurilor $\angle AOB$ și, respectiv $\angle COA$ Atunci $\angle MON = \angle AOM + \angle AON = \frac{\angle AOB}{2} + \frac{\angle COA}{2} = \frac{360^\circ - \angle BOC}{2} = 120^\circ$ $\Rightarrow \angle MON = \angle BOC = 120^\circ$.	3p

Enunț subiect 4, autor Flavian Georgescu

Pentru $n \in \mathbf{N}^*$, $n \geq 3$, o mulțime nevidă $M \subseteq \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$ se numește n – bună dacă are proprietatea că, pentru orice două numere x și y din mulțimea M , restul împărțirii lui $x + y$ la n este și el în mulțimea M .

- Determinați mulțimile 3 – bune.
- Dacă M este mulțime n – bună, iar $1 \notin M$ și $3 \in M$, demonstrați că $n : 3$.
- Câte mulțimi 2023 – bune există?

Detalii rezolvare	Barem asociat
a) Dacă $1 \in M \Rightarrow 1 + 1 = 2 \in M$. Cum $1 + 2 = 3 \Rightarrow 0 \in M \Rightarrow M = \{0, 1, 2\}$ Dacă $2 \in M$, cum $2 + 2 = 4 \Rightarrow 1 \in M$ $\Rightarrow$ mulțimile 3 – bune sunt $\{0, 1, 2\}$ și $\{0\}$	1p
b) Dacă $n = 3k + 1$, cum $3 \in M \Rightarrow 3m \in M$, pentru orice $m \leq k \Rightarrow 3k \in M \Rightarrow 2 \in M$. Dar $3k \in M, 2 \in M \Rightarrow 1 \in M$, contradicție!	1p
Dacă $n = 3k + 2$, cum $3 \in M \Rightarrow 3m \in M$, pentru orice $m \leq k \Rightarrow 3k \in M, 2 \in M \Rightarrow 1 \in M$, contradicție! $\Rightarrow n : 3$	1p
c) Dacă $1 \in M \Rightarrow 1 + 1 \in M \Rightarrow 1 + 2 \in M \Rightarrow 4, 5, \dots, 2022 \in M \Rightarrow 0 \in M \Rightarrow M = \{0, 1, 2, \dots, 2022\}$	1p
Fie $a \in M, a > 1$, cel mai mic element nenul din M , dacă există. Dacă n este cel mai mic număr natural cu proprietatea că $na \geq 2023 \Rightarrow 2023 > na - a \Rightarrow a > 2023 - na$ Avem $na - 2023 = r \in M, r < a$. Dacă $r > 0$ contradicție, a minim! Dacă $r = 0 \Rightarrow na = 2023 \Rightarrow a 2023 \Rightarrow a \in \{7, 17, 7 \cdot 17, 17^2\}$	2p
Mulțimile 2023 – bune sunt $A = \{0, 1, 2, \dots, 2022\}, \{0\}, A \cap M_7, A \cap M_{17}, A \cap M_{119}, A \cap M_{289}$, în total 6 mulțimi 2023 – bune.	1p



OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ, 11.02.2023
CLASA a VII-a
SOLUȚII ȘI BAREME ORIENTATIVE

Notă: Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte. Se acordă numai punctaje întregi. Orice altă rezolvare se asimilează conform baremului.

Enunț subiect 1, autor ***

Fie numerele naturale m, n, p astfel încât $\frac{\sqrt{2023}}{m} = \frac{n}{\sqrt{p}}$. Știind că m și n sunt prime, determinați $m + n$.

Detalii rezolvare	Barem asociat
$mn = \sqrt{2023p} \Leftrightarrow m^2n^2 = 2023p \Leftrightarrow m^2n^2 = 17^2 \cdot 7 \cdot p \Rightarrow$	3p
$17 m^2n^2$, cu m, n prime $\Rightarrow 17 m$ sau $17 n \Rightarrow m = 17$ sau $n = 17$	2p
Dacă $m = 17 \Rightarrow 17^2n^2 = 17^2 \cdot 7 \cdot p \Rightarrow 7 n^2 \Rightarrow n = 7$ Analog, dacă $n = 17 \Rightarrow m = 7 \Rightarrow m + n = 24$.	2p

Enunț subiect 2, autori Cristina și Mihai Vijdeluc, G.M. 10/2022

Determinați numerele naturale nenule n pentru care numărul

$a(n) = \sqrt{(1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n)^5 + 145}$ este natural.

Detalii rezolvare	Barem asociat
$a(n) \in \mathbb{N} \Leftrightarrow (1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n)^5 + 145$ este pătrat perfect	1p
I. $n \geq 5 \Rightarrow (n!)^5 = M_{25}, 145 = M_{25} + 20 \Rightarrow 5 (1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n)^5 + 145$ și $25 \nmid (1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n)^5 + 145 \Rightarrow (1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n)^5 + 145$ nu este pătrat perfect	2p
II. $n = 4 \Rightarrow (1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4)^5 + 145 = (M_7 + 3)^5 + M_7 + 5 = M_7 + 3^5 + M_7 + 5$ $=$ $M_7 + 5 + M_7 + 5 = M_7 + 3$ nu este pătrat perfect	1p
III. $n = 3 \Rightarrow (1 \cdot 2 \cdot 3)^5 + 145 = 7921 = 89^2 \Rightarrow n = 3$ soluție	1p
III. $n = 2 \Rightarrow (1 \cdot 2)^5 + 145 = 177$ nu este pătrat perfect	1p
III. $n = 1 \Rightarrow 1^5 + 145 = 146$ nu este pătrat perfect	1p

Enunț subiect 3, autor Traian Preda

Fie triunghiul echilateral ABC și punctul D situat în același semiplan ca punctul A față de dreapta BC , iar punctul $E \in (DC)$, astfel încât $AB = BD = DE$ și $\sphericalangle ABD = 40^\circ$. Dacă $\{F\} = AE \cap BC$,

- Arătați că $(BE$ este bisectoarea $\sphericalangle ABC$;
- Determinați măsura $\sphericalangle FDC$.

Detalii rezolvare	Barem asociat
a) $\triangle BDC$ isoscel ($BD = BC$), $\sphericalangle BDC = 100^\circ \Rightarrow \sphericalangle BCD = 40^\circ$	1p
$\triangle BDE$ isoscel ($BD = DE$) $\Rightarrow \sphericalangle DBE = 70^\circ \Rightarrow \sphericalangle ABE = 70^\circ - 40^\circ = 30^\circ \Rightarrow$ (BE este bisectoarea $\sphericalangle ABC$)	1p
b) Notăm $AB \cap DE = \{O\} \Rightarrow \sphericalangle ODB = \sphericalangle OBD = 40^\circ \Rightarrow \triangle OBD$ isoscel $\Rightarrow$ $OB = OD$. Cum $AB = DE \Rightarrow AO = OE \Rightarrow \triangle OAE$ isoscel	1p
Cum $\sphericalangle AOE = \sphericalangle BOD = 100^\circ \Rightarrow \sphericalangle OAE = \sphericalangle OEA = 40^\circ \Rightarrow$ $\sphericalangle AFB = 180^\circ - (60^\circ + 40^\circ) = 80^\circ$ și $\sphericalangle BOE = 180^\circ - 100^\circ = 80^\circ$	1p
Obținem $\triangle BEO \equiv \triangle BEF$ (L.U.U.) $\Rightarrow OB = BF$ Cum $\sphericalangle OBF = 60^\circ \Rightarrow \triangle BOF$ echilateral $\Rightarrow OF = OB$.	2p
Dar $OB = OD \Rightarrow OF = OD \Rightarrow \triangle OFD$ isoscel $\Rightarrow \sphericalangle ODF = \sphericalangle CDF = 10^\circ$.	1p

Enunț subiect 4, autor Mihaela Berindeanu

Fie cercul de diametru AB și punctele C și D pe cerc, de o parte și de alta a dreptei AB . Notăm $BD \cap AC = \{E\}$, $BC \cap AD = \{F\}$, iar O este centrul cercului circumscris $\triangle AEF$. Dacă $OC \parallel ED$:

- Calculați măsura $\sphericalangle DAC$;
- Arătați că $ODBC$ este paralelogram.

Detalii rezolvare	Barem asociat
$\sphericalangle ADB = 90^\circ$ (unghi înscris în semicerc), iar $CO \parallel BD \Rightarrow CO \perp AF$	2p
O centrul cercului circumscris $\triangle AEF$, $CO \perp AF \Rightarrow CO$ mediatoarea lui $AF \Rightarrow$ $\triangle CAF$ isoscel	1p
$\sphericalangle ACB = 90^\circ$ (unghi înscris în semicerc) $\Rightarrow \triangle CAF$ dreptunghic isoscel $\Rightarrow$ $\sphericalangle CAF = 45^\circ$	1p
b) $\sphericalangle CAF = 45^\circ$, $\sphericalangle ADE = 90^\circ \Rightarrow \triangle DAE$ dreptunghic isoscel $\Rightarrow DA = DE$	1p
Cum $OA = OE$ (raze) și $DA = DE \Rightarrow DO$ mediatoarea lui $AE \Rightarrow$	1p
$DO \perp AE$. Dar $BC \perp AE \Rightarrow DO \parallel BC$ și cum $CO \parallel BD \Rightarrow ODBC$ paralelogram.	1p



OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ, 11.02.2023
CLASA a VIII-a
SOLUȚII ȘI BAREME ORIENTATIVE

Notă: Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte. Se acordă numai punctaje întregi. Orice altă rezolvare se asimilează conform baremului.

Enunț subiect 1, autor Bogdan Georgescu

- a) Arătați că, dacă numerele x, y și $\sqrt{x} + \sqrt{y}$ sunt naturale, atunci și numerele $\sqrt{x}$ și $\sqrt{y}$ sunt naturale.
- b) Determinați numerele naturale a, b, n cu proprietatea că
 $a^2 - b^2 = \sqrt{2023 - n} + \sqrt{n - 1978}$.

Detalii rezolvare	Barem asociat
a) Fie $\sqrt{x} + \sqrt{y} = a, a \in \mathbf{N}$. $a = 0 \Leftrightarrow x = y = 0 \Rightarrow \sqrt{x} = \sqrt{y} = 0 \in \mathbf{N}$ Dacă $a > 0 \Rightarrow (\sqrt{x} + \sqrt{y})(\sqrt{x} - \sqrt{y}) = a(\sqrt{x} - \sqrt{y}) \Rightarrow x - y = a(\sqrt{x} - \sqrt{y})$ $\Rightarrow$ $\sqrt{x} - \sqrt{y} \in \mathbf{Q}$ (am considerat $x > y$, expresia fiind simetrică) Cum $\sqrt{x} + \sqrt{y} \in \mathbf{Q}$, obținem $2\sqrt{x} \in \mathbf{Q} \Rightarrow \sqrt{x} \in \mathbf{Q} \Rightarrow x$ pătrat perfect $\Rightarrow \sqrt{x} \in \mathbf{N} \Rightarrow \sqrt{y} \in \mathbf{N}$.	1p
b) $2023 - n, n - 1978, a^2 - b^2 \in \mathbf{N} \xrightarrow{cf.a)} 2023 - n$ și $n - 1978$ sunt pătrate perfecte, cu $1978 \leq n \leq 2023$. Dacă $2023 - n = x^2, n - 1978 = y^2 \Rightarrow x^2 + y^2 = 45$. Verifică doar $36 + 9 = 9 + 36 = 45 \Rightarrow n \in \{1987, 2014\}$	1p
Obținem $(a - b)(a + b) = 9 \Rightarrow a - b = 1$ și $a + b = 9 \Rightarrow a = 5, b = 4$ sau $a - b = 3$ și $a + b = 3 \Rightarrow a = 3, b = 0$.	2p

Enunț subiect 2, autor Nicolae Ivășchescu, G.M. 6-7-8/2022

Dacă x, y, z sunt numere reale și $2(3x\sqrt{2} + 2y\sqrt{3} - z\sqrt{5}) = x^2 + y^2 + z^2 + 35$,
calculați $x^4 + y^4 + z^4$.

Detalii rezolvare	Barem asociat
$x^2 - 6x\sqrt{2} + 18 + y^2 - 4y\sqrt{3} + 12 + z^2 + 2z\sqrt{5} + 5 = 0 \Leftrightarrow$ $(x - 3\sqrt{2})^2 + (y - 2\sqrt{3})^2 + (z + \sqrt{5})^2 = 0$	3p
$(x - 3\sqrt{2})^2 \geq 0, (y - 2\sqrt{3})^2 \geq 0, (z + \sqrt{5})^2 \geq 0 \Rightarrow x - 3\sqrt{2} = 0, y - 2\sqrt{3} = 0,$ $z + \sqrt{5} = 0 \Rightarrow x = 3\sqrt{2}, y = 2\sqrt{3}, z = -\sqrt{5}.$	2p
Deci $x^4 + y^4 + z^4 = 81 \cdot 4 + 16 \cdot 9 + 25 = 493$.	2p

Enunț subiect 3, autor Cristian Olteanu

Fie $ABCD A' B' C' D'$ cub și $M \in (AB), N \in (BC)$ astfel încât $\frac{MB}{AM} = \frac{CN}{NB} = (\sqrt{3} - 1)^{-1}$.

Notăm $DM \cap AC = \{E\}, AN \cap DB = \{F\}, NC' \cap B'C = \{P\}$ și $MB' \cap A'B = \{Q\}$.

Determinați $m(\sphericalangle EF, PQ)$.

Detalii rezolvare	Barem asociat
$\frac{MB}{AM} = \frac{CN}{NB} \Rightarrow \frac{AB}{AM} = \frac{BC}{NB} \Rightarrow AM = NB$ și $MB = NC$	1p
$\Delta AEM \sim \Delta CED \Rightarrow \frac{ME}{ED} = \frac{AM}{DC}$, iar $\Delta NFB \sim \Delta AFD \Rightarrow \frac{BF}{FD} = \frac{NB}{AD} \Rightarrow$	1p
$\frac{ME}{ED} = \frac{BF}{FD} \Rightarrow EF \parallel MB$	1p
$\Delta NPC \sim \Delta C'PB' \Rightarrow \frac{NP}{PC'} = \frac{NC}{B'C'}$, iar $\Delta MQB \sim \Delta B'QA' \Rightarrow \frac{MQ}{QB'} = \frac{MB}{A'B'} \Rightarrow$ $\frac{NP}{PC'} = \frac{MQ}{QB'} \Rightarrow PQ \parallel MC \Rightarrow \sphericalangle(EF, PQ) = \sphericalangle(MB, MC) = \sphericalangle CMB$	2p
În ΔCMB dreptunghic, avem $tg \sphericalangle CMB = \frac{BC}{MB}$ $\frac{MB}{AM} = \frac{1}{\sqrt{3} - 1} \Rightarrow \frac{MB}{AB} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \frac{BC}{MB} = \sqrt{3} \Rightarrow tg \sphericalangle CMB = \sqrt{3} \Rightarrow \sphericalangle CMB = 60^\circ$.	2p

Enunț subiect 4, autor Traian Preda

Pe planul rombului $ABCD$ ducem $VO \perp (ABC)$, unde $\{O\} = AC \cap BD$. Fie M și N mijloacele muchiilor VA , respectiv VB . Demonstrați că:

a) Dreptele VO, CM și DN sunt concurente;

b) Dacă $m(\sphericalangle VC, MD) = m(\sphericalangle VD, NC)$, atunci piramida $VABCD$ este o piramidă regulată.

Detalii rezolvare	Barem asociat
a) VO, CM mediane în $\Delta VAC \Rightarrow$ dacă $\{T\} = VO \cap CM$, atunci T este centrul de greutate al $\Delta VAC \Rightarrow \frac{VT}{TO} = 2$. Dar VO mediană și în $\Delta VBD \Rightarrow T$ centrul de greutate al ΔVBD DN mediană în $\Delta VBD \Rightarrow T \in DN \Rightarrow VO, CM$ și DN sunt concurente în T .	2p
b) MO linie mijlocie în $\Delta VAC \Rightarrow MO \parallel VC \Rightarrow \sphericalangle(VC, MD) = \sphericalangle OMD$ Analog $\sphericalangle(VD, NC) = \sphericalangle ONC \Rightarrow \sphericalangle OMD = \sphericalangle ONC$ (1)	1p
$CO \perp (VDB) \Rightarrow CO \perp ON$; $DO \perp (VAC) \Rightarrow DO \perp OM$ (2)	1p
(1), (2) $\Rightarrow \Delta NOC \sim \Delta MOD (U.U.) \Rightarrow \frac{OC}{OD} = \frac{ON}{OM} \Rightarrow \frac{OC}{OD} = \frac{VD}{VC}$	1p
$\Leftrightarrow \frac{OC^2}{OD^2} = \frac{VO^2 + OD^2}{VO^2 + OC^2} \Leftrightarrow (OC^2 - OD^2)(VO^2 + OC^2 + OD^2) = 0 \Rightarrow OC = OD$	1p
$ABCD$ pătrat, $VO \perp (ABC) \Leftrightarrow VABCD$ este o piramidă regulată.	1p



OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ, 11.02.2023
CLASA a 9-a
SOLUȚII ȘI BAREME ORIENTATIVE

Notă: Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte. Se acordă numai punctaje întregi. Orice altă rezolvare se asimilează conform baremului.

Problema 1 (autor *Flavian Georgescu*)

Determinați toate mulțimile M , cu elementele numere întregi, care respectă simultan următoarele două condiții:

- i) $1 \notin M$, $2 \notin M$, $3 \in M$
- ii) Oricum am lua $x, y \in M$, nu neapărat distincte, avem $x - y \in M$.

Detalii rezolvare	Barem asociat
$3 - 3 = 0 \in M$	1p
$0 - 3 = -3 \in M$, $3 - (-3) = 6 \in M$, $6 - (-3) = 9 \in M$, inductiv $3n \in M, \forall n \in \mathbb{N}$	2p
$0 - 3n = -3n \in M, \forall n \in \mathbb{N}$, deci $3n \in M, \forall n \in \mathbb{Z}$	1p
Dacă $x \in M$ și $3n < x < 3n + 3, n \in \mathbb{Z}$, atunci $y = 3n + 3 - x \in M$ și $y \in \{1, 2\}$ - fals	2p
În concluzie, $M = \{3n \mid n \in \mathbb{Z}\}$	1p

Problema 2 (autor *Vlad Petru*, SGM 12/2022)

Rezolvați ecuația $\left\{ \frac{2x+1}{6} \right\} + \left\{ \frac{x+5}{3} \right\} = \frac{5x+4}{12}$ în mulțimea numerelor reale. Prin $\{a\}$ s-a notat partea fracționară a numărului real a .

Detalii rezolvare	Barem asociat
Ecuația este echivalentă cu $\left[\frac{2x+1}{6} \right] + \left[\frac{x+5}{3} \right] = \frac{x+6}{4}$, sau $\left[\frac{2x+1}{6} \right] + \left[\frac{x+2}{3} \right] = \frac{x+2}{4}$	2p
Înlocuim $x = 4t - 2, t \in \mathbb{Z}$ și obținem $\left[\frac{4t}{3} - \frac{1}{2} \right] + \left[\frac{4t}{3} \right] = t, t \in \mathbb{Z}$	2p
Folosind identitatea Hermite, sau analizând cazuri modulo 3, obținem $t = 1$	2p
$x = 2$	1p

Problema 3 (autor ***)

Se consideră un triunghi ABC care nu este dreptunghic. Notăm centrul cercului său circumscris cu O și punctele diametral opuse vârfurilor A, B, C , în acest cerc, cu A', B' , respectiv C' . Notăm ortocentrele triunghiurilor $A'BC, AB'C, ABC'$ cu H_a, H_b respectiv H_c . Demonstrați că:

a) $\overrightarrow{AH_a} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} - 2\overrightarrow{OA}$;

b) Centrele de greutate ale triunghiurilor ABC și $H_aH_bH_c$ coincid.

Detalii rezolvare	Barem asociat
a) $\overrightarrow{AH_a} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OH_a}$	1p
$\overrightarrow{OH_a} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OA'}$ (Sylvester)	2p
$\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{OA'} = -\overrightarrow{OA}$, deci $\overrightarrow{AH_a} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} - 2\overrightarrow{OA}$	1p
b) $3\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$, unde G este centrul de greutate al triunghiului ABC	1p
Ținând cont și de a), dacă G' este centrul de greutate al triunghiului $H_aH_bH_c$, atunci $3\overrightarrow{OG'} = \sum \overrightarrow{OH_a} = \sum (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AH_a}) = \sum \overrightarrow{OA} = 3\overrightarrow{OG}$, deci $G = G'$	2p

Problema 4 (autor *Simion Petre*)

a) Fie a, b, c numere reale pozitive, astfel încât $a + 2b + 3c = 1$. Aflați valoarea maximă posibilă a expresiei $(a + c)(b + c)$.

b) Numerele reale pozitive x, y, z, p verifică relația $xyz(x + y + z) = p^4$. Demonstrați că $x + 2y + 3z \geq 4p$.

Detalii rezolvare	Barem asociat
a) $1 = (a + c) + 2(b + c) \geq 2\sqrt{2(a + c)(b + c)}$, deci $E = (a + c)(b + c) \leq \frac{1}{8}$	2p
Pentru $a = \frac{3}{8}, b = \frac{1}{8}, c = \frac{1}{8}$ obținem $a + 2b + 3c = 1$ și $E = \frac{1}{8}$, deci $\max E = \frac{1}{8}$	1p
b) $x + 2y + 3z = (x + z) + 2(y + z) \geq 2\sqrt{2(x + z)(y + z)}$	2p
$2\sqrt{2(x + z)(y + z)} = 2\sqrt{2}\sqrt{xy + z(x + y + z)} \geq 2\sqrt{2}\sqrt{2\sqrt{xyz(x + y + z)}} = 4p$	2p



OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ, 11.02.2023
CLASA a 10-a
SOLUȚII ȘI BAREME ORIENTATIVE

Notă: Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte. Se acordă numai punctaje întregi. Orice altă rezolvare se asimilează conform baremului.

Problema 1 (autor ***)

a) Rezolvați ecuația $\log_2 x - \log_x 27 = \log_3 x - \log_x 8$.

b) Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 10 \cdot 9^x - 21 \cdot 6^x + 9 \cdot 4^x$. Arătați că $f\left(\frac{\lg 3 - \lg 5}{\lg 3 - \lg 2}\right) = f(1)$.

Detalii rezolvare	Barem asociat
a) Ecuația se scrie $a + \frac{3}{a} = b + \frac{3}{b}$, unde $a = \log_2 x$, $b = \log_3 x$	2p
Obținem I) $a = b$, de unde $x = 1$, care nu convine și II) $ab = 3$, de unde $(\log_2 x)^2 = 3 \log_2 3$, $x = 2^{\pm \sqrt{3 \log_2 3}}$	2p
b) $f(1) = 0$	1p
$f(x) = 0 \Leftrightarrow 10 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{2x} - 21 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^x + 9 = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^x = \frac{3}{2}$ sau $\left(\frac{3}{2}\right)^x = \frac{3}{5}$, deci a doua soluție a ecuației $f(x) = 0$ este $\log_{\frac{3}{2}} \frac{3}{5} = \frac{\lg 3 - \lg 5}{\lg 3 - \lg 2}$, de unde concluzia	2p

Problema 2, (autor Sânziana Dumitran, GM 11/2022)

Determinați minimul expresiei $f(z) = \frac{\operatorname{Re}(z^4)}{(\operatorname{Re} z)^4}$, când z parcurge mulțimea numerelor complexe care au partea reală nenulă.

Detalii rezolvare	Barem asociat
Dacă $z = r(\cos a + i \sin a)$, cu $r \in \mathbb{R}^*$, $a \in \mathbb{R}$ și $\cos a \neq 0$, atunci $f(z) = \frac{\cos 4a}{\cos^4 a}$	2p
$\cos 4a = 8 \cos^4 a - 8 \cos^2 a + 1$, $f(z) = 8 + \frac{1-8t}{t^2}$, unde $t = \cos^2 a$	2p
$\frac{1-8t}{t^2} = x \Leftrightarrow xt^2 + 8t - 1 = 0$, iar $\Delta = 64 + 4x \geq 0 \Rightarrow x \geq -16 \Rightarrow f(z) \geq -8$	2p
Avem $x = -16$ pentru $t = \frac{1}{4} \Leftrightarrow a = \pm \frac{\pi}{3} + n\pi$, deci $\min f(z) = -8$, deoarece valoarea -8 se atinge	1p

Problema 3, (autor *)**

Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{x} + \sqrt{x+5} = \sqrt[3]{x+4} + \sqrt[3]{x+23}$.

Detalii rezolvare	Barem asociat
Observăm că 4 este soluție	2p
Arătăm că $\sqrt{x} < \sqrt[3]{x+4}$ (1) și $\sqrt{x+5} < \sqrt[3]{x+23}$ (2) pentru $x \in [0, 4)$, iar $\sqrt{x} > \sqrt[3]{x+4}$ (3) și $\sqrt{x+5} > \sqrt[3]{x+23}$ (4) pentru $x > 4$, deci 4 este soluție unică	1p
$(\sqrt{x})^3 - (\sqrt[3]{x+4})^3 = x(\sqrt{x}-1) - 4 \begin{cases} < 4(2-1) - 4 = 0, \text{ pentru } x \in [0, 4) \\ > 4(2-1) - 4 = 0, \text{ pentru } x > 4 \end{cases} \Rightarrow (1) \text{ și } (3)$	2p
$x = 4$ $(\sqrt{x+5})^3 - (\sqrt[3]{x+23})^3 = (x+5)(\sqrt{x+5}-1) - 18 \begin{cases} < 9(3-1) - 18 = 0, \text{ pentru } x \in [0, 4) \\ > 9(3-1) - 18 = 0, \text{ pentru } x > 4 \end{cases}$ $\Rightarrow (2) \text{ și } (4)$	2p

Problema 4, autor Mihail Bălună

Determinați numerele întregi n pentru care există o mulțime finită A de numere reale nenule și o funcție bijectivă $f: A \rightarrow A$ cu proprietatea $f(x) + f(f(x)) = nx$, oricare ar fi $x \in A$.

Detalii rezolvare	Barem asociat
Pentru $a \in A$ de modul maxim avem $ na = f(a) + f(f(a)) \leq f(a) + f(f(a)) \leq 2 a $ (1) și $ a > 0$, deci $ n \leq 2$	2p
Pentru $n = 2$ luăm A oarecare și $f = 1_A$, deci $n = 2$ convine	1p
Pentru $n = 0$ luăm $A = \{-a, a\}$, $a \in \mathbb{R}^*$ și $f(x) = -x$, deci $n = 0$ convine	1p
Pentru $n = -1$ luăm $A = \{a, b, c\}$ cu $a + b + c = 0$ și $f(a) = b, f(b) = c, f(c) = a$, deci $n = -1$ convine	1p
Pentru $n = -2$ și $a \in A$ de modul maxim inegalitățile din (1) devin egalități, deci $ f(a) = f(f(a)) = a $ și $\text{sgn } f(a) = \text{sgn } f(f(a))$, de unde $f(a) = f(f(a))$, ceea ce duce la $a = f(a) = f(f(a))$, contradicție; $n = -2$ nu convine	1p
Pentru $n = -1$, $a \in A$ de modul maxim și $b \in A$ astfel încât $f(f(b)) = a$ avem $a + f(b) = b$ și $f(a) + a = f(b)$, de unde $2a = b - f(a)$, ceea ce duce la $a = b = -f(a)$. Reiese $a = f(a) + f(f(a)) = -a + a = 0$, fals; $n = -1$ nu convine	1p



OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ, 11.02.2023

CLASA a 11-a

SOLUȚII ȘI BAREME ORIENTATIVE

Notă: Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte. Se acordă numai punctaje întregi. Orice altă rezolvare se asimilează conform baremului.

Enunț subiectul 1, autori Ana-Maria și Daniel Petriceanu

a) Fie $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ astfel încât $AB = BA$ și $A^{2023} = B^{2023} = I_n$. Demonstrați că $\det(A + B) \neq 0$.

b) Demonstrați că nu există $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Q})$ astfel încât $\det(A^2 - 2I_2) = 0$ și $\det(A^2 - 3I_2) = 0$.

Detalii rezolvare		Barem asociat
a)	Din ipoteză: $(A + B)(A^{2022} - A^{2021}B + \dots + B^{2022}) = A^{2023} + B^{2023} = 2I_n$	2p
	Rezultă $A + B$ este inversabilă, deci $\det(A + B) \neq 0$.	1p
b)	Presupunem că există A cu proprietățile cerute. Avem $\det(A - \sqrt{2}I_2)(A + \sqrt{2}I_2) = 0$ $\Leftrightarrow \det(A - \sqrt{2}I_2) = 0$ sau $\det(A + \sqrt{2}I_2) = 0$.	2p
	Fie $\det(A - \sqrt{2}I_2) = 0$, rezultă $\det(A) + 2 - \sqrt{2} \operatorname{tr}(A) = 0$. Deoarece $\det(A)$, $\operatorname{tr}(A) \in \mathbb{Q}$, rezultă $\operatorname{tr}(A) = 0$ și $\det(A) = -2$.	1p
	Din teorema Hamilton- Cayley rezultă $A^2 - 2I_2 = O_2$, iar $\det(A^2 - 3I_2) = 1$. Fals. Analog pentru $\det(A + \sqrt{2}I_2) = 0$. Obs. Se poate folosi în rezolvare polinomul caracteristic al unei matrice.	1p

Enunț subiectul 2, autori Costel Chiteș și Daniel Petriceanu

Fie mulțimea $M = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid \det(A) \neq 0\}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$ și $f: M \rightarrow M$, $f(A) = A^*$, unde A^* reprezintă matricea adjuncă a matricei A .

a) Dacă n este număr par, demonstrați că f este funcție bijectivă.

b) Este f funcție bijectivă dacă n este număr impar?

Detalii rezolvare		Barem asociat
a)	Fie $B \in M$, $f(A) = B$. Atunci $A^* = B$. Notăm $d = \det(A)$, $d \neq 0$. Deoarece A este inversabilă, atunci $A^* = (\det A) \cdot A^{-1} \Leftrightarrow A^* = dA^{-1}$, rezultă $dA^{-1} = B \Rightarrow \det(dA^{-1}) = \det(B) \Leftrightarrow d^{n-1} = \det(B) \Leftrightarrow d = \sqrt[n-1]{\det(B)}$, $n-1$ este număr impar.	3p
	Am obținut că $(\sqrt[n-1]{\det B})A^{-1} = B \Leftrightarrow A^{-1} = \frac{1}{\sqrt[n-1]{\det(B)}}B$	1p
	Obținem că $A = \sqrt[n-1]{\det(B)}B^{-1} \in M$. Ecuația considerată are soluție unică, deci funcția f este bijectivă.	1p
b)	Fie $A_1 = I_n$ și $A_2 = -I_n$. Deoarece $\det(A_1) = 1$ și $\det(A_2) = -1$, rezultă $A_1, A_2 \in M$. $f(A_1) = I_n$, iar $f(A_2) = I_n$. Rezultă că funcția f nu este injectivă, deci nu este bijectivă.	2p

Enunț subiectul 3, autor Nicolae Mușuroia (Gazeta Matematică)

Fie șirul $(a_n)_{n \geq 1}$ cu termenii strict pozitivi dat de relația $a_{n+1} = \ln(a_1 + a_2 + \dots + a_n)$, $n \geq 1$.

Determinați $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_{n+1}}{a_n} - 1 \right) e^{a_n}$.

Detalii rezolvare		Barem asociat
Relația de recurență se poate scrie $a_{n+1} = \ln(e^{a_n} + a_n)$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Deoarece $a_n > 0$, rezultă $\ln(e^{a_n} + a_n) > \ln e^{a_n} = a_n$, atunci $a_{n+1} > a_n$, $\forall n \geq 1$. Am demonstrat că $(a_n)_{n \geq 1}$ este șir strict crescător.		3p
Din teorema lui Weierstrass pe $\overline{\mathbb{R}}$ rezultă că există $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$, $L \in \overline{\mathbb{R}}$. Presupunem că $L \in \mathbb{R}$, din relația de recurență obținem $L = \ln(e^L + L) \Leftrightarrow L = 0$. Fals. Rezultă că $L = \infty$.		2p
Pe de altă parte $a_{n+1} - a_n = \ln\left(1 + \frac{a_n}{e^{a_n}}\right)$, iar $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{e^{a_n}} = 0$.		1p
Obținem $\left(\frac{a_{n+1}}{a_n} - 1\right) e^{a_n} = \frac{\ln\left(1 + \frac{a_n}{e^{a_n}}\right)}{\frac{a_n}{e^{a_n}}}$, rezultă că există $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_{n+1}}{a_n} - 1\right) e^{a_n} = 1$.		1p

Enunț subiectul 4, autor Daniel Petriceanu

a) Fie $(x_n)_{n \geq 1}$ un șir de numere reale definit prin $x_{n+1} = |x_n - 1|$, $\forall n \geq 1$, $x_1 = a$, $a \in \mathbb{R}$.

Determinați toate valorile lui $a \in \mathbb{R}$ astfel încât șirul $(x_n)_{n \geq 1}$ să fie convergent.

b) Demonstrați că șirul $(y_n)_{n \geq 1}$, definit prin $y_n = \sin n^2$, $\forall n \geq 1$, nu are limită.

Detalii rezolvare		Barem asociat
a)	Dacă $a \geq 0$, notăm $p = [a]$, rezultă $x_{p+1} = a - [a] = \{a\}$, $x_{p+1} \in [0; 1)$.	1p
	Avem $x_{p+2} = x_{p+1} - 1 = 1 - x_{p+1}$, $x_{p+3} = x_{p+2} - 1 = x_{p+1}$. Obținem $x_{p+n} = x_{p+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, n număr impar și $x_{p+n} = 1 - x_{p+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, n par. Șirul $(x_n)_{n \geq 1}$ este convergent dacă și numai dacă $x_{p+1} = 1 - x_{p+1} \Leftrightarrow x_{p+1} = \{a\} = \frac{1}{2}$. Rezultă $a = p + \frac{1}{2}$, $p \in \mathbb{N}$.	2p
	Dacă $a < 0$, atunci $x_2 > 1$, din cazul precedent rezultă $a = j + \frac{1}{2}$, $j \in \mathbb{Z}^*$, $j < 0$. Soluția problemei este $a = j + \frac{1}{2}$, $j \in \mathbb{Z}$.	1p
b)	Presupunem că există $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = L$, $L \in [-1; 1]$. Avem $y_{3n} + y_{21n} = 2y_{15n} \cos(216n^2)$, rezultă $L = 0$ sau există $\lim_{n \rightarrow \infty} \cos(216n^2) = 1$.	1p
	Dacă există $\lim_{n \rightarrow \infty} \cos(216n^2) = 1$, atunci există $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin(216n^2) = 0$, rezultă există $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin(432n^2) = 0$ și $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin(1296n^2) = 0$, deci $\lim_{n \rightarrow \infty} y_{36n} = 0$, rezultă $L = 0$.	1p
	Avem $y_{n+1} = y_n \cos(2n+1) + \cos(n^2) \sin(2n+1)$, rezultă $\lim_{n \rightarrow \infty} \cos(n^2) \sin(2n+1) = 0$ și $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin(2n+1) = 0$. Notăm $z_n = \sin(2n+1)$. Deoarece $z_{2n+1} - z_{2n-1} = 2 \sin 2 \cos(4n+1)$, rezultă că există $\lim_{n \rightarrow \infty} \cos(4n+1) = 0$. Fals. Așadar, șirul $(y_n)_{n \geq 1}$ nu are limită.	1p



OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ, 11.02.2023
CLASA a 12-a
SOLUȚII ȘI BAREME ORIENTATIVE

Notă: Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte. Se acordă numai punctaje întregi. Orice altă rezolvare se asimilează conform baremului.

Problema 1 (*Gazeta Matematică*)

Determinați funcțiile $f: (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ care au simultan proprietățile:

- a) f este bijectivă, derivabilă, cu $f'(x) \neq 0$, pentru orice $x \in (0, \infty)$;
 b) f admite o primitivă F cu proprietatea că $F \circ f^{-1}$ este o primitivă a funcției f^{-1} .

Detalii rezolvare	Barem asociat
Știind că $(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$, $\forall x \in (0, \infty)$ și că $(F \circ f^{-1})'(x) = f^{-1}(x)$ se obține $x = f'(f^{-1}(x))f^{-1}(x)$, $\forall x \in (0, \infty)$.	2p
Deducem că $f(x) = f'(x) \cdot x$, $\forall x \in (0, \infty)$.	2p
Integrând obținem $\ln(f(x)) = \ln x + c$, $\forall x \in (0, \infty)$ cu $c \in \mathbb{R}$.	1p
De aici se obține $f(x) = kx$, $\forall x \in (0, \infty)$, unde k este un număr real pozitiv.	2p

Problema 2 (autor *Ovidiu Șontea*)

Pe mulțimea numerelor reale se consideră legea asociativă $x \circ y = xy - 3x - 3y + 12$. Determinați numerele reale a și b pentru care mulțimea $G = \{x \in \mathbb{R} | x^2 + ax + b = 0\} \subset [2, 4]$ este parte stabilă a mulțimii numerelor reale în raport cu legea dată, iar $(G, \circ)$ este grup.

Detalii rezolvare	Barem asociat
Se observă că $ G \leq 2$. Din $e \circ e = e$ obținem $e = 3$ sau $e = 4$	2p
Dacă $e = 3$ atunci $x \circ e = 3$, $\forall x \in G$, deci $G = \{3\}$, de unde $a = -6, b = 9$	2p
Dacă $e = 4$, atunci $G = \{4\}$ - caz în care $a = -8, b = 16$	2p
sau $G = \{4, x\}$, cu $x \circ x = 4$, de unde $x = 2$, caz în care $a = -6, b = 8$	1p

Problema 3 (autori *Costel Chiteș, Vlad Drincianu*)

Să se calculeze : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x \cdot \operatorname{tg} x \cdot (1 - \cos x)} \cdot \int_0^{x^4} \frac{\sin t}{t \cdot \cos t^2} dt$.

Detalii rezolvare	Barem asociat
-------------------	---------------

Funcția $f: \left[0, \frac{\pi}{4}\right] \rightarrow \mathbb{R}, f(t) = \begin{cases} 1, & t = 0 \\ \frac{\sin t}{t \cdot \cos t^2}, & t > 0 \end{cases}$ este continuă.	2p
Prin aplicarea teoremei de medie, deducem existența $c_x \in (0, x^4)$ a.i. $\int_0^{x^4} \frac{\sin t}{t \cdot \cos t^2} dt = x^4 \cdot \frac{\sin c_x}{c_x \cdot \cos^2 c_x}.$	2p
Cum $\lim_{x \rightarrow 0} c_x = 0, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$, deducem că valoarea limitei este 2.	3p

Problema 4 (*)**

Fie $(G, \cdot)$ un grup finit pentru care există un automorfism al său $f: G \rightarrow G$ având proprietățile:
 $f(x) \neq x, \forall x \in G \setminus \{e\}$ și $(f \circ f)(x) = x, \forall x \in G.$

- a) Arătați că funcția $\sigma: G \rightarrow G, \sigma(x) = x^{-1} \cdot f(x)$ este bijectivă;
b) Arătați că $(G, \cdot)$ este grup abelian.

Detalii rezolvare	Barem asociat
a) Într-adevăr, se presupune că $x, y \in G$ cu $\sigma(x) = \sigma(y)$; atunci $x^{-1} \cdot f(x) = y^{-1} \cdot f(y)$ și $f(x \cdot y^{-1}) = x \cdot y^{-1}$. Cum $f(x) = x$ implică $x = e$, deducem că $x = y$, deci σ este injectivă, iar cum G este finit, va rezulta că σ este bijectivă.	3p
b) Din a) deducem că fiecare element $x \in G$ poate fi scris în mod unic ca $x = y^{-1}f(y)$ pentru un $y \in G$.	2p
Astfel, avem $f(x) = f(y)^{-1}f(f(y)) = f(y)^{-1}y = x^{-1}$ deci pentru orice $a, b \in G$, avem $b^{-1}a^{-1} = (ab)^{-1} = f(ab) = f(a)f(b) = a^{-1}b^{-1}.$	2p